MÉTODOS DE INTEGRACIÓN/2

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1. Sumatoria y notación
2. La integral definida y la integral indefinida
3. Integrales elementales
4. Métodos de integración 1
5. ***Métodos de integración 2***
6. Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

$$\int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x) - \int F'(x)g(x)dx$$

Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 5

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN /2

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 2
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1436-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

5.1 Integrales conteniendo trinomios cuadráticos en el integrando

5.2 Descomposición de una expresión racional

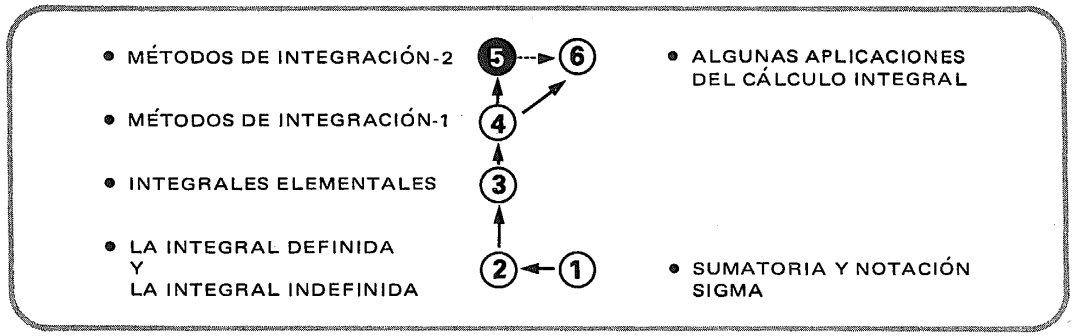
5.3 Integración por fracciones parciales

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 5. Métodos de integración 2

Objetivos: integrar funciones racionales mediante la descomposición del radicando en fracciones parciales

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Manejo de expresiones exponenciales o logarítmicas	2	9, 10
• Manejo de expresiones trigonométricas	5	1, 3, 4, 5, 6, 8
• Derivación de funciones	7	4, 5
• Concepto de integral	8	1, 2
• Integrales elementales	8	3
• Métodos de integración 1	8	4

5.1

Integrales conteniendo trinomios cuadráticos en el integrando

1

En el módulo anterior
hemos aprendido a integrar
funciones conteniendo
binomios de la forma
$(u^2 - a^2)$ o $(a^2 \pm u^2)$

por sustitución trigonométrica o
por el método de integración por partes

2

Por ejemplo:

calculemos $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$

por sustitución trigonométrica.

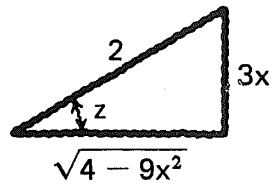
3

$$\int \frac{dx}{4 - 9x^2} = ?$$

Triángulo auxiliar de cambio de variable:

Ecuaciones de cambio de variable:

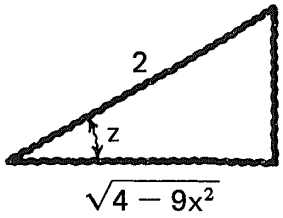
Por ejemplo



$$4 - 9x^2 = 4\cos^2 z \leftarrow 1$$
$$3x = 2 \operatorname{sen} z$$
$$x = \frac{2 \operatorname{sen} z}{3}$$
$$dx = \frac{2 \cos z \, dz}{3} \leftarrow 2$$

4

$$\int \frac{dx}{4 - 9x^2} = \underline{\qquad} \leftarrow \text{Integral puesta en términos de z}$$



Solución en términos de z

Solución en términos de x

$$\sqrt{4 - 9x^2} = 2 \cos z \leftarrow 1$$
$$dx = \frac{2 \cos z \, dz}{3} \leftarrow 2$$

- $\int \frac{2 \cos z \, dz}{3 \cdot 4 \cos^2 z} = \frac{1}{6} \int \frac{dz}{\cos z}$
- $\frac{1}{6} \int \sec z \, dz$

$$\frac{1}{6} \ln \left| \sec z + \tan z \right| + C_1$$

o

$$\frac{1}{6} \ln \left| \frac{2}{\sqrt{4 - 9x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{4 - 9x^2}} \right| + C$$

o bien:

- $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{2 + 3x}{2 - 3x} \right| + C$

5

Ahora bien,
si en un integrando
encontramos un trinomio
cuadrático de la forma

$$x^2 + px + q$$

podemos expresarlo como un
binomio de alguna de las formas:

$$u^2 \pm a^2 \quad \text{o} \quad a^2 \pm u^2$$

completando un trinomio cuadrado
perfecto y factorizando.

6

Por ejemplo:

el trinomio cuadrático $x^2 + 4x + 8$
puede ser expresado como
un binomio, de la forma
$u^2 + a^2$

así

$x^2 + 4x + 4 + 4$

trinomio cuadrado perfecto

$(x + 2)^2 + 4$

$(x + 2)^2 + (2)^2$

7

El trinomio $x^2 - 2x + 5$

puede ser expresado como un
binomio de la forma: $u^2 + a^2$
así

$x^2 - 2x + 1 + 4$

T.C.P.*

$(x - 1)^2 + (2)^2$

* Recuérdese que T.C.P. son las siglas de Trinomio Cuadrado Perfecto.

8

Similarmente,

sea el
trinomio cuadrático: $10 + 6x + x^2$

Binomio equivalente de
la forma $a^2 + u^2$:

$1 + 9 + 6x + x^2$

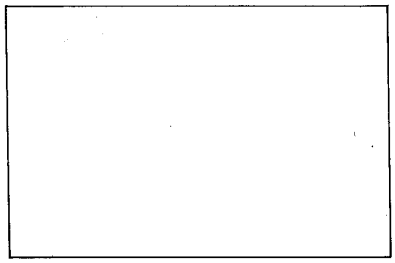
T.C.P.

$1 + (3 + x)^2$

- $1^2 + (3 + x)^2$

9

Trinomio cuadrático: $x^2 + 3x + 4$



Binomio equivalente de la forma $u^2 + a^2$: ⌊ ⌋

$$x^2 + 3x + \overbrace{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}}^{4}$$

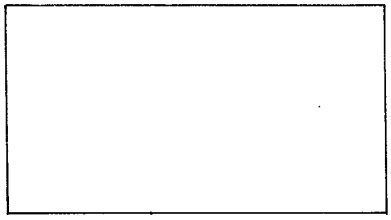
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{T.C.P.}}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

10

Trinomio cuadrático: $x^2 - 5x - 1$



Binomio equivalente: ⌊ ⌋

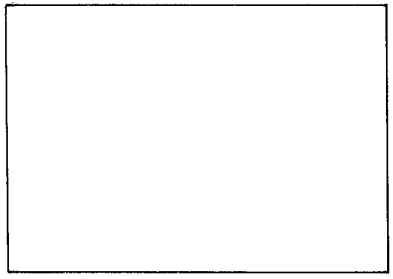
$$x^2 - 5x + \overbrace{\frac{25}{4} - \frac{29}{4}}^{-1}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$$

11

Trinomio cuadrático: $15 + 4x - x^2$



Binomio equivalente: ⌊ ⌋

$$-(-15 - 4x + x^2)$$

$$-(x^2 - 4x - 15)$$

$$\underbrace{-(x^2 - 4x \overbrace{+4}^{-15} - 19)}_{\text{T.C.P.}}$$

$$-[(x-2)^2 - 19]$$

$$\left(\sqrt{19}\right)^2 - (x-2)^2$$

12

Utilizando la idea anterior,
podemos expresar un trinomio
cuadrático de la forma: $px^2 + qx + r$
como el producto de dos factores,
uno de los cuales es p,
y el otro es un binomio de alguna
de las formas estudiadas en los
cuadros anteriores.

13

Trinomio cuadrático: $\mathbf{3x^2 + 4x + 1}$

Expresión conteniendo
un binomio de la forma
$u^2 - a^2$:

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)$$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \overbrace{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}}^{\frac{1}{3}}\right)$$

T.C.P.

$$3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]$$

8.5.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

14

Vamos a aplicar el conocimiento adquirido a la solución de algunas integrales conteniendo trinomios cuadráticos.

15

Se requiere calcular $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$

Empezamos por expresar el denominador como un binomio :

$$\underbrace{x^2 - 2x + \overbrace{1}^{5} + 4}_{\text{T.C.P.}}$$

$$(x - 1)^2 + (2)^2$$

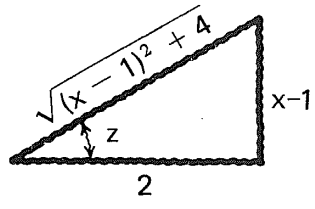
$$\int \frac{dx}{(x - 1)^2 + (2)^2}$$

16

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + (2)^2}$$

Ahora, resolvemos la integral resultante por sustitución trigonométrica.

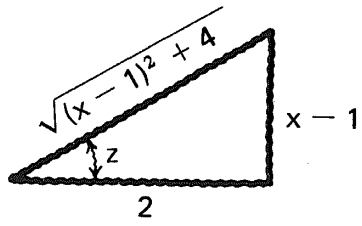
Triángulo auxiliar para cambio de variable :



17

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

ecuaciones de cambio de variable:



$x - 1 = 2 \tan z$

$dx = 2 \sec^2 z \, dz$ ← 1

$(x-1)^2 + 4 = 4 \sec^2 z$ ← 2

18

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} = \square$$

integral expresada en términos de z

$x - 1 = 2 \tan z$

$dx = 2 \sec^2 z \, dz$ ← 1

$(x-1)^2 + 4 = 4 \sec^2 z$ ← 2

solución en términos de z: $\square$

solución en términos de x: $\square$

$$\int \frac{2 \sec^2 z \, dz}{4 \sec^2 z} = \frac{1}{2} \int dz$$

$\frac{z}{2} + C_1$

$\frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tan} \frac{x-1}{2} + C$

19

Obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tan} \frac{x-1}{2} + C$$

20

Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$

Integral con el denominador convenientemente transformado

$3x - x^2 - 2$

$-x^2 + 3x - 2$

$-(x^2 - 3x + 2)$

$-\left[x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right]$

$-\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] =$

$\left[\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2\right]$

$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$

21

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

Resolviendo por sustitución trigonométrica:

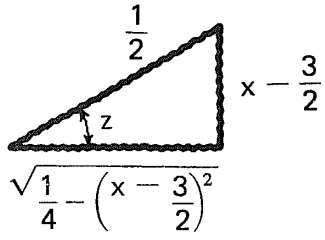
Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cos z \leftarrow 1$$

$$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} z$$

$$dx = \frac{1}{2}\cos z\, dz \leftarrow 2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\cos z\, dz}{\frac{1}{2}\cos z}$$



$$= \int dz$$

$$= z + C_1$$

$$= \text{Arc sen}\, \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \textbf{Arc sen (2x − 3) + C}$$

22

Obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \text{Arc sen}(2x - 3) + C$$

23

Calcular $\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\,dx$

Integral con el radicando convenientemente transformado

$$x^2 - 4x + \overbrace{4}^{13} + 9$$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{T.C.P.}} + 9$$

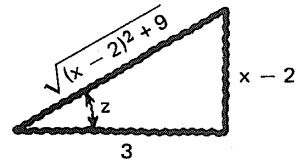
$$(x - 2)^2 + 9$$

$$\int \sqrt{(x - 2)^2 + 9}\,dx$$

24

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\,dx = \int \sqrt{(x - 2)^2 + 9}\,dx$$

Por sustitución trigonométrica:



$$\sqrt{(x - 2)^2 + 9} = 3 \sec z \quad \leftarrow 1$$

$$x - 2 = 3 \tan z$$

$$dx = 3 \sec^2 z\,dz \quad \leftarrow 2$$

$$\int \sqrt{(x - 2)^2 + 9}\,dx$$

$$= \int 3 \sec z \cdot 3 \sec^2 z\,dz$$

$$= 9 \int \sec^3 z\,dz$$

25

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\,dx = 9 \int \sec^3 z\,dz$$

Hemos visto que es posible calcular la integral resultante "por partes" o aplicando directamente la fórmula de reducción 6.5:

Fórmula de reducción 6.5:

$$\int \sec^m u\,du = \frac{1}{m-1}\sec^{m-2} u \tan u + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} u\,du$$

$$\int \sec^3 z\,dz = \frac{1}{2}\sec z \tan z + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

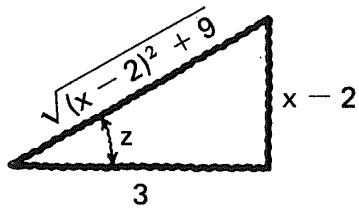
$$= \frac{1}{2}\sec z \tan z + \frac{1}{2}\ln|\sec z + \tan z| + C_1$$

26

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\,dx = 9 \int \sec^3 z\,dz$$

$$= \frac{9}{2}\sec z \tan z + \frac{9}{2}\ln|\sec z + \tan z| + C_1$$

Con ayuda de este triángulo auxiliar pongamos el resultado en términos de x.



$$\frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{(x-2)^2 + 9}}{3} \cdot \frac{(x-2)}{3}$$

$$\frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-2)^2 + 9}}{3} + \frac{x-2}{3}\right| + C$$

$$\frac{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 13}}{2}$$

$$+ \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + (x-2)}{3}\right| + C$$

27

Obtenemos:

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 13}\,dx = \frac{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 13}}{2} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + (x-2)}{3}\right| + C$$

28

Se requiere calcular $\int (3x^2 - 5x + 1)\,dx$

Atención.

$3\int x^2 dx - 5\int x\,dx + \int dx$

$x^3 - \frac{5x^2}{2} + x + C$

8.5.1.2

Práctica adicional de
cálculo de integrales
conteniendo trinomios cuadráticos,
si se considera necesario.

29

Calcular $\int \frac{(1 + 2x)\,dx}{1 + x^2}$

$\int \frac{dx}{1 + x^2} + \int \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$

Por la fórmula 3.2:

$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{Arc tan } x$

Por la fórmula 1.5:

$\int \frac{2x\,dx}{1 + x^2} = \ln|1 + x^2| = \ln(1 + x^2)$

puesto que $1 + x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces:

$\int \frac{(1 + 2x)\,dx}{1 + x^2} = \text{Arc tan } x + \ln(1 + x^2) + C$

30

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = ?$$

Respuesta en los tres cuadros siguientes.

31

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}} = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x+2}}$$

Por la fórmula de reducción 5.1, obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x+2}} = \int x^{\frac{1}{2}}(2+x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \sqrt{x^2+2x} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

32

Por lo que:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Hemos obtenido:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Para resolver la integral del segundo miembro, vamos a transformar el radicando en un binomio de alguna de las formas: $u^2 - a^2$ o $a^2 \pm u^2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

Y, de acuerdo con la fórmula 3.7:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}} = \ln\left|(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x}\right|$$

Finalmente, obtenemos:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \sqrt{x^2 + 2x} + 2\ln\left|(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x}\right| + C$$

33

Estudiemos, ahora, un procedimiento alternativo para resolver integrales como ésta

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

en que el numerador del integrando es una expresión lineal (de primer grado) y el denominador es un binomio de alguna de las formas: $u^2 - a^2$ o $a^2 \pm u^2$, un trinomio cuadrático de la forma $px^2 + qx + r$, o la raíz cuadrada de alguna de estas expresiones.

34

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Empecemos por transformar el radicando en una expresión binomia de alguna de las formas: $u^2 - a^2$ o $a^2 \pm u^2$.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

35

Estudiar con atención.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

Efectuemos, ahora, la siguiente transformación del numerador:

$$x+3 = \overbrace{x+1+2}^{3}$$

con lo que la integral dada puede expresarse como la suma de dos integrales.

$$\int \frac{(x+1+2)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \boxed{\qquad}$$

$$2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

36

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

Haciendo

$x + 1 = u$ ← **1**

$1 = 1^2 = a^2$ ← **2**

$dx = du$ ← **3**

obtenemos: $\boxed{\qquad}$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

37

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

Resolvemos en términos de u: $\boxed{\qquad}$

y escribimos el resultado en términos de x: $\boxed{\qquad}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\,u\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$\frac{1}{2}\int (u^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,u\,du$$

$$\frac{1}{2}\left[2(u^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

- $\sqrt{u^2-a^2}$
- $\sqrt{(x+1)^2-1} = \sqrt{x^2+2x}$

38

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

Haciendo

$x + 1 = u$ ← 1
$1 = 1^2 = a^2$ ← 2
[ ] ← 3

obtenemos: [ ]

$dx = du$

$$2\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

39

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$2\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

De acuerdo con la fórmula 3.7 [ ]

$$2\ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right|$$

y escribiendo en términos de x [ ]

$$2\ln\left|(x+1) + \sqrt{x^2+2x}\right|$$

40

Obtenemos, como antes:

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left|(x+1) + \sqrt{x^2+2x}\right| + C$$

41

Estudiemos con atención
este resumen del procedimiento:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$= \int \frac{(x+1+2)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$= \int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$= \sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x}\right| + C$$

42

Aplicando el procedimiento anterior,

calculemos $\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3}$

Escribimos la integral dada con el denominador adecuadamente transformado:

$$3(x^2 - \frac{4}{3} + 1)$$

$$3\left(x^2 - \frac{4}{3} + \overbrace{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}}^{1}\right)$$

$$3\left[\left(x-\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\right]\right.$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

43

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{3}\int \frac{(x-1)\,dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

Ahora, transformamos el numerador

y

escribimos como la suma de dos integrales

- $\frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{2}{3}\overbrace{-\frac{1}{3}}^{-1}\right)dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$
- $\frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$

$$-\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

44

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

Resolvemos haciendo el cambio de variable correspondiente, y escribimos el resultado en términos de x.

$$-\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\right|$$

o

$$\frac{1}{6}\ln\left|x^2-\frac{4}{3}x+1\right|$$

o

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3\left(x^2-\frac{4x}{3}+1\right)}{3}\right|$$

o

$$\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| \overbrace{-\frac{1}{6}\ln 3}^{\text{constante}}$$

45

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

Resolvemos y damos el resultado en términos de x :

$$-\frac{\sqrt{5}}{15}\operatorname{Arc\,tan}\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

o

$$-\frac{\sqrt{5}}{15}\operatorname{Arc\,tan}\frac{3x-2}{\sqrt{5}}$$

46

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2-4x+3\right| - \frac{\sqrt{5}}{15}\operatorname{Arc\,tan}\frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C$$

8.5.1.3

Práctica adicional de
cálculo de integrales
de alguna de las formas

$$\int \frac{(a + bx)\,dx}{px^2 + qx + r}$$

$$\int \frac{(a + bx)\,dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

si se considera necesario.

8.5.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* una integral dada de alguna de las formas:

$$\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

$$\int \sqrt{px^2 + qx + r}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

- *calcular* una integral dada de alguna de las formas:

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{px^2 + qx + r}$$

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

5.2

Descomposición de una expresión racional

47

Recordemos que un polinomio en x con coeficientes reales es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ y
$n, n-1, n-2, \ldots \in \mathbb{N}$

48

Al cociente de dos polinomios le hemos llamado: expresión racional

y tiene este aspecto:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0}$$

49

A una **expresión racional** en que
el grado del numerador
es menor que
el grado del denominador
le llamamos

_____

expresión racional propia

50

Expresión racional impropia
es aquella en que

_____

el grado del numerador
es mayor que
el grado del denominador

51

Si dividimos
el numerador
de una expresión
racional impropia
entre su denominador
obtenemos una

_____

expresión racional mixta

52

$$\frac{3x + 5}{x^2 + 3x - 4}$$

es una [ ]

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{3x^2 + 8x + 3}$$

es una [ ]

expresión racional propia

expresión racional impropia

53

Si dividimos el numerador entre el denominador de la expresión racional [ ]

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 8x + 3}$$

obtenemos la expresión racional [ ]

[ ]

impropia

$$\begin{array}{r|l} & x - 8 \\ \hline x^3 + 0 + 5x - 1 & x^2 + 8x + 3 \\ -x^3 - 8x^2 - 3x & \\ \hline -8x^2 + 2x - 1 & \\ +8x^2 + 64x + 24 & \\ \hline 66x + 23 & \end{array}$$

mixta

$$x - 8 + \frac{66x + 23}{x^2 + 8x + 3}$$

54

expresión racional impropia

expresión racional [ ]

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + 8x + 3} = x - 8 + \frac{66x + 23}{x^2 + 8x + 3}$$

polinomio

expresión racional [ ]

mixta

propia

55

En general, si dividimos el numerador entre el denominador de una expresión racional impropia obtenemos una expresión racional mixta formada por un polinomio + una expresión racional [ ]

propia

56

expresión racional impropia = **polinomio + expresión racional**

[ ]

expresión racional mixta

57

Ejemplo:

$$\underbrace{\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 - 3x + 2}}_{\text{expresión racional impropia}} = \underbrace{[\quad]}_{\text{polinomio}} + \underbrace{[\quad]}_{\text{expresión racional propia}}$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 5 \\ \hline x^2 - 3x + 2 & x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ & -x^3 + 3x^2 - 2x \\ \hline & 5x^2 - 6x - 8 \\ & -5x^2 + 15x - 10 \\ \hline & 9x - 18 \end{array}$$

$$x + 5 + \frac{9x - 18}{x^2 - 3x + 2}$$

58

Tenemos la expresión racional impropia

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

que vamos a poner en la forma de una expresión racional mixta:

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \;\overline{)\; x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \hline x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1 \\ -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x \\ \hline x^3 + 5x^2 - 10x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 + x - 2 \\ \hline 7x^2 - 9x - 1 \end{array}$$

$$x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

59

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Ahora bien, es posible, al menos en teoría, transformar una expresión racional propia en una suma de expresiones racionales propias a las que se les da el nombre de

fracciones parciales

60

Veamos como podemos expresar

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

como una

suma de fracciones parciales

61

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Empezaremos por descomponer
el denominador
en sus factores primos.

62

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Veamos a continuación, algunos hechos
que nos ayudarán en la tarea de factorizar
un polinomio con coeficientes enteros,
como éste:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

63

Si *r es una raíz de la ecuación* $P(x) = 0$
entonces $x - r$ *es un factor del polinomio* $P(x)$.

64

Empecemos por considerar
el polinomio de primer grado

$$3x - 5$$

La raíz o solución **única** de la ecuación

$$3x - 5 = 0$$

es $\frac{5}{3}$

65

El polinomio $3x - 5$

puede ser reescrito así: $3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

Vemos que $x - \frac{5}{3}$ es un factor del polinomio dado.

66

Tenemos, ahora,
el polinomio cuadrático

$$x^2 - x - 6$$

Las **dos** raíces o soluciones de la ecuación
$x^2 - x - 6 = 0$ son:

$r_1 =$ ⌊_____⌋

$r_2 =$ ⌊_____⌋

Por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

3

-2

67

El polinomio cuadrático $x^2 - x - 6$

puede ser escrito en la forma $(x - 3)(x + 2)$
en que 3 y (-2)
son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$

Vemos que:

$x - 3$ es un factor de $x^2 - x - 6$

y

$x + 2$ es otro factor de $x^2 - x - 6$

68

Sea el polinomio cuadrático

$$8x^2 + 2x - 3$$

Las **dos** raíces o soluciones de la ecuación

$$8x^2 + 2x - 3 = 0$$

son $r_1 =$ ⌊_____⌋

$r_2 =$ ⌊_____⌋

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16}$$

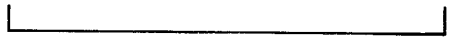
$$x = \frac{-2 \pm 10}{16}$$

$\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{4}$

69

El polinomio $8x^2 + 2x - 3$
puede ser expresado
como un producto de factores, así:



Observar con atención.

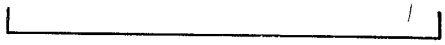
$$8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)$$

podemos verificar esto efectuando el producto.

70

El polinomio $3x^2 + 2x - 5$

puede ser expresado
como un producto de factores,
así:



$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -\frac{5}{3}$$

$$3(x - 1)\left(x + \frac{5}{3}\right)$$

71

El polinomio $5x^2 - 3x - 1$

puede ser expresado
como un producto de factores, así:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{10}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

$$r_1 = \frac{3 + \sqrt{29}}{10}$$

$$r_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{10}$$

$$5\left(x - \frac{3 + \sqrt{29}}{10}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{29}}{10}\right)$$

72

El polinomio $2x^2 - 5x + 8$

puede ser expresado
como un producto de factores, así:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 64}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{39}\, i}{4}$$

$$r_1 = \frac{5 + \sqrt{39}\, i}{4}$$

$$r_2 = \frac{5 - \sqrt{39}\, i}{4}$$

$$2\left(x - \frac{5 + \sqrt{39}\, i}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{39}\, i}{4}\right)$$

73

Aunque el polinomio $2x^2 - 5x + 8$

puede ser expresado
como un producto de factores, en esta forma:

$$2\left(x - \frac{5 + \sqrt{39}\, i}{4}\right)\left(x - \frac{5 - \sqrt{39}\, i}{4}\right)$$

no nos interesan, ahora,
más que los factores reales.

74

Diremos que el trinomio cuadrático

$$2x^2 - 5x + 8$$

es **irreducible**
al no poder ser descompuesto
en factores reales.

8.5.2.1

Práctica adicional de descomposición de un trinomio cuadrático de la forma:

$ax^2 + bx + c$

en factores reales, señalando los trinomios que resulten irreducibles, si se considera necesario.

75

Podemos descomponer en factores reales un polinomio de grado mayor al segundo, si conocemos las raíces reales de la ecuación polinomia correspondiente.

76

Ahora, tenemos el polinomio cúbico

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

que podemos descomponer en factores si conocemos al menos una de las raíces reales de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

77

Supongamos que sabemos que 1
es una de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

entonces,
un factor del polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
es [_____]

$(x - 1)$

78

Decir que $(x - 1)$ es un factor de

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

equivale a afirmar que:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es divisible entre $x - 1$

Dividamos, entonces, $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ entre $x - 1$.

Cociente : [_____]

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 6 \\ \hline x - 1 & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ & -x^3 + x^2 \\ \hline & -x^2 - 5x \\ & +x^2 - x \\ \hline & -6x + 6 \\ & +6x - 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$x^2 - x - 6$

79

Atención.

Podemos, entonces, escribir:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}_{\text{dividendo}} = \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{\text{cociente}} \underbrace{(x - 1)}_{\text{divisor}}$$

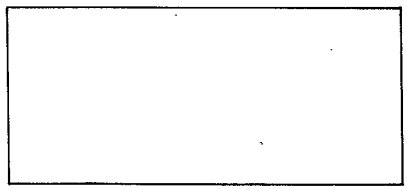
Hemos descompuesto el polinomio dado en
un trinomio cuadrático y un factor lineal.
Efectuaremos enseguida la factorización del
trinomio cuadrático

$$x^2 - x - 6$$

aplicando el procedimiento que ya conocemos.

80

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x^2 - x - 6)(x - 1)$



$x^2 - x - 6 =$ ⌊ ⌋

Por lo tanto:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$ ⌊ ⌋

producto de tres factores

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$r_1 = 3$

$r_2 = -2$

$(x - 3)(x + 2)$

$(x - 3)(x + 2)(x - 1)$

81

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x^2 - x - 6)(x - 1)$

$= (x - 3)(x + 2)(x - 1)$

Hemos logrado la descomposición del polinomio cúbico en tres factores lineales de la forma $x - r$.

82

El éxito del procedimiento bosquejado para la factorización de un polinomio de grado mayor al segundo, depende del conocimiento que tengamos de las raíces de la ecuación polinomia correspondiente.

83

Conocemos las dificultades
para la **resolución de ecuaciones**
de grado mayor al segundo;
sin embargo,
algunas ideas en este sentido
pueden sernos de utilidad.

84

Un teorema, que aceptaremos sin demostración.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

es un polinomio con coeficientes enteros,

y si $\frac{r}{s}$ *es una raíz racional irreducible de* $P(x) = 0$

entonces,

r es un divisor de a_0

y

s es un divisor de a_n.

85

Veamos cómo podemos utilizar
este conocimiento para lograr
nuestros propósitos de factorización.

86

Consideremos nuestro ya conocido polinomio

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

en que $a_0 =$ [ ]

y

$a_n =$ [ ]

6

1

87

Si la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

tiene raíces racionales,

éstas tendrán la forma $\frac{r}{s}$
de manera que:

r es un divisor de [ ]

y

s es un divisor de [ ]

6

1

88

Nos preguntamos ahora:

¿Cuáles son los divisores de 6?

[ ]

y

¿cuáles son los divisores de 1?

[ ]

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

± 1

89

Entonces:

$r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

y

$s \in$ [_____]

$\{\pm 1\}$

90

Puesto que

$r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

y

$s \in \{\pm 1\}$

$\frac{r}{s} \in$ [_____]

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

91

Quiere decir que:

si la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

tiene raíces racionales,
éstas habrán de ser
elementos del conjunto

$\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

92

Nuestro problema se reduce,
entonces, a verificar
cuáles elementos del conjunto

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

satisfacen la ecuación

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

93

Por ejemplo:

— **1 satisface/no satisface** la ecuación:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

puesto que

no satisface

$(-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 0$
$-1 - 2 + 5 + 6 = 0$
PCF $8 = 0$

proposición cerrada falsa

94

1 satisface/no satisface la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

puesto que

satisface

$(1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$
$1 - 2 - 5 + 6 = 0$
PCV $0 = 0$

proposición cerrada verdadera

95

Hemos encontrado que **1** es una raíz de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

de modo que:

un factor del polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es $(x - 1)$.
Las otras dos raíces pueden ser determinadas, como ya lo hemos hecho, dividiendo el polinomio dado entre $(x - 1)$ y factorizando el trinomio cuadrático resultante.

96

Habíamos obtenido

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x + 2)(x - 1)$$

por lo que las otras dos raíces de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

son ___ y ___

que **son/no son** elementos del conjunto

$\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

$3 - 2$

son

97

Observemos con atención.

Las raíces racionales de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ en caso de existir, deben ser elementos del conjunto

$\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

Encontramos que dichas raíces son:

$-2, -1$ y 3

y:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x + 1)(x - 3)$

98

Probemos con un polinomio
de cuarto grado.

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$$

Si la ecuación $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$
tiene raíces racionales (de la forma $\frac{r}{s}$)
deberá cumplirse que:

r ⌊_____⌋
y
s ⌊_____⌋

es un divisor de 4

es un divisor de 2

99

Los divisores de 4 son:

⌊_____⌋

Los divisores de 2 son:

⌊_____⌋

$\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$\pm 1, \pm 2$

100

Siendo $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$
el conjunto de los divisores de 4,
y $\{\pm 1, \pm 2\}$
el conjunto de los divisores de 2,
el conjunto de las posibles raíces racionales
de la ecuación $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$
es

⌊_____⌋

$\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}\right\}$

101

Sustituyamos cada una de las posibles raíces en la ecuación $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ y veamos cuales la satisfacen.

-1 ⌊_____⌋ -4 ⌊_____⌋

1 ⌊_____⌋ 4 ⌊_____⌋

-2 ⌊_____⌋ $-\frac{1}{2}$ ⌊_____⌋

2 ⌊_____⌋ $\frac{1}{2}$ ⌊_____⌋

Señalar con $\surd$ los números que son raíces de la ecuación y con $\times$ los que no lo son.

$-1\surd$ $-4\times$

$1\times$ $4\times$

$-2\surd$ $-\frac{1}{2}\times$

$2\surd$ $\frac{1}{2}\surd$

102

Encontramos que:

las 4 raíces de la ecuación

$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$

son los números racionales: $-1, -2, 2$ y $\frac{1}{2}$

por lo que el polinomio $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$ tiene 4 factores lineales de la forma $(x - a)$, que son

⌊_____⌋

$(x + 1), (x + 2), (x - 2)$ y $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

103

Si efectuamos el producto

$$(x + 1)(x + 2)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

obtenemos

⌊_____⌋

$x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 2x + 2$

104

Polinomio que queremos factorizar: $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$

Por otro lado:

$$\left(x + 1\right)\left(x + 2\right)\left(x - 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 2x + 2$$

Observemos con atención y escribamos la expresión correspondiente al polinomio factorizado:

$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 =$ _____

$2\left(x + 1\right)\left(x + 2\right)\left(x - 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

105

Queda resuelto nuestro problema de factorización

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 2\left(x + 1\right)\left(x + 2\right)\left(x - 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

El polinomio ha sido descompuesto en **cuatro factores lineales distintos** de la forma $(x - a)$ (además del factor constante 2).

106

Consideremos, ahora, el polinomio

$$x^3 + 4x^2 + 4x$$

que queremos descomponer en factores.

107

$$x^3 + 4x^2 + 4x$$

Por simple inspección
podemos decir que
uno de los factores
del polinomio es [_____]

x

108

Entonces,

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4)$$

Observando con atención
el resultado,
podemos escribir:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = [_____]$$

$x(x+2)^2$ o $x(x+2)(x+2)$

109

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x + 2)(x + 2)$$

Hemos obtenido
como producto de la descomposición
tres factores lineales de la forma $(x - a)$,
a saber: $(x - 0)$, $(x + 2)$ y $(x + 2)$.

Vemos que **dos** de los **factores** son **iguales.**

110

Factorizar el polinomio:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x$$

111

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x$$

Uno de los factores es [ ]

x

por lo que podemos escribir

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x = [\quad]$$

$x(x^3 + x^2 - 2x - 2)$

112

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2x - 2)$$

Concentremos la atención
en el polinomio $x^3 + x^2 - 2x - 2$

Cualquiera de sus raíces racionales $\frac{r}{s}$ expresada
en forma irreducible deberá
ser tal que:

r es un divisor de [ ]

-2

y

s es un divisor de [ ]

1

113

Conjunto de divisores de -2: $\{\pm 1, \pm 2\}$

Conjunto de divisores de 1: $\{\pm 1\}$

114

Conjunto de divisores de (-2): $\{\pm 1, \pm 2\}$

Conjunto de divisores de 1: $\{\pm 1\}$

Conjunto de posibles raíces racionales de la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$: $\{\pm 1, \pm 2\}$

115

Indicar con ☑ los números que son raíces de la ecuación $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ y con ☒ los que no lo son:

-1 ☑

1 ☒

-2 ☒

2 ☒

116

$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2x - 2)$

Sabemos que (-1) es una raíz del polinomio $x^3 + x^2 - 2x - 2$, por lo tanto uno de sus factores es: $\square$

$x + 1$

117

Si dividimos $x^3 + x^2 - 2x - 2$ entre $x + 1$ obtenemos

$\square$

$x^2 - 2$

por lo que podemos escribir:

$x^3 + x^2 - 2x - 2 = \square \cdot \square$

$(x + 1)(x^2 - 2)$

118

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2x - 2)$$

pero como

$x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^2 - 2)$

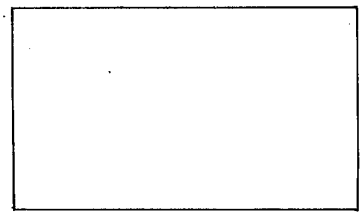
$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = \square$

$x(x + 1)(x^2 - 2)$

119

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x + 1)(x^2 - 2)$$

Para completar la factorización
hace falta descomponer el factor cuadrático $x^2 - 2$.



$x^2 - 2 =$ [ ] · [ ]

Resolviendo $x^2 - 2$:

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

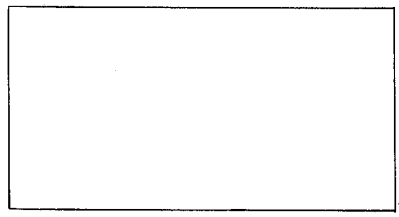
$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

120

Estudiar con atención.

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x^3 + x^2 - 2x - 2)$$
$$= x(x + 1)(x^2 - 2)$$
$$= x(x + 1)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

Comprobamos, efectuando el producto
de los factores encontrados:



$x(x + 1) = x^2 + x$

$\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = x - 2$

$$\begin{array}{r} x^2 + x \\ x - 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x \end{array}$$

121

Estudiar con atención.

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = x(x + 1)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$$

Hemos logrado descomponer el polinomio
dado en **4 factores lineales distintos**
de la forma (x − a).

Debemos observar que la ecuación

$$x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x = 0$$

tiene 4 raíces:

dos racionales [ ] y [ ]
y
dos irracionales [ ] y [ ]

0 $\quad -1$

$\sqrt{2} \quad -\sqrt{2}$

122

Sea el polinomio $3x^3 - 8x^2 + 5x - 2$

que se requiere expresar como un producto de factores.

123

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2$$

Determinemos las raíces racionales de la ecuación $3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0$, si las hay.

Conjunto de divisores de -2:

$\{\pm 1, \pm 2\}$

Conjunto de divisores de 3:

$\{\pm 1, \pm 3\}$

Conjunto de posibles raíces racionales de la ecuación:

$\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\}$

Única raíz racional de la ecuación: **2**
(puesto que es el único elemento del conjunto $\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\}$ que satisface la ecuación dada).

124

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2$$

Como 2 es una raíz de la ecuación

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = 0$$

podemos escribir:

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = \square \cdot \square$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline x - 2 & 3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ & -3x^3 + 6x^2 \\ \hline & \quad -2x^2 + 5x \\ & \quad +2x^2 - 4x \\ \hline & \qquad\quad x - 2 \\ & \qquad\quad -x + 2 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$(x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$

125

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$$

Continuemos con la factorización, descomponiendo el trinomio cuadrático:

Estudiar con atención.

Para encontrar las raíces de la ecuación:

$3x^2 - 2x + 1 = 0$

escribimos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8\,i}}{3}$$

Conclusión:

la ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 0$ no tiene raíces reales o el trinomio cuadrático $3x^2 - 2x + 1$ no puede ser descompuesto en factores reales o el trinomio cuadrático $3x^2 - 2x + 1$ es irreducible.

126

Para nuestros propósitos actuales, consideramos el **polinomio totalmente factorizado** en la siguiente forma

$$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$$

Hemos obtenido:

un factor lineal de la forma $(x - a)$
y un factor cuadrático de la forma $(ax^2 + bx + c)$

127

Si encontramos que:

un polinomio no tiene raíces racionales, sus **raíces** habrán de ser **irracionales** (reales no racionales) o **complejas no reales.**

128

Hemos visto que:

tenemos manera de calcular las raíces irracionales de un polinomio de segundo grado, pero la determinación de las **raíces irracionales de un polinomio de grado mayor al segundo** está más allá de los objetivos de este estudio.

129

Vamos a considerar los siguientes cuatro casos en la factorización de un polinomio.*

1. Todos los factores son lineales de la forma $(x - a)$ y son distintos.
2. Todos los factores son lineales de la forma $(x - a)$ y algunos son iguales.
3. Hay factores cuadráticos (irreducibles) todos distintos.
4. Hay factores cuadráticos (irreducibles), algunos de los cuales son iguales.

* No se consideran los factores constantes.

130

Un polinomio del caso **1**:

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 2(x + 1)(x + 2)(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

131

Un polinomio del caso **2**:

$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x + 2)(x + 2) = x(x + 2)^2$

132

Un polinomio del caso **3**:

$3x^3 - 8x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(3x^2 - 2x + 1)$

133

Un polinomio del caso **4**:

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2$

8.5.2.2

Práctica adicional de
descomposición de un polinomio dado
en factores reales,
señalando el caso a que pertenece,
si se considera necesario.

134

Regresemos, ahora,
al problema que motivó
el estudio de la
factorización de un polinomio.

135

Veíamos que:
una expresión racional impropia
puede ser escrita como la suma
de un polinomio y
una expresión racional propia.
Por ejemplo:
habíamos encontrado que

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

136

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Nos habíamos propuesto
"descomponer" la
expresión racional propia
en una **suma de fracciones parciales**
para lo cual se requería,
como primer paso, factorizar
el polinomio del denominador.
Ahora sabemos cómo abordar esta
factorización.

137

Intentemos, entonces,
factorizar el polinomio:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

indicando el caso a que pertenece.

Respuesta
en los dos
cuadros siguientes.

138

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

1. El polinomio no tiene un factor común.
2. Las raíces racionales de la ecuación $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ si existen, tendrán la forma irreducible r/s, en que:

   r deberá ser un divisor de 2

   y

   s un divisor de 1.

   Los divisores de 2 son $\pm 1, \pm 2$.
   Los divisores de 1 son ± 1.
   El conjunto de las posibles raíces racionales de la ecuación es $\{\pm 1, \pm 2\}$.

(-1), 1 y 2 son raíces de la ecuación
porque hemos encontrado que la satisfacen

3. Podemos, entonces, escribir:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

que comprobamos efectuando el producto indicado del segundo miembro.

4. El polinomio pertenece al caso de factorización 1

139

La expresión racional propia:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

puede ser escrita así:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}$$

140

Atención .

Caso 1

Si el denominador pertenece al caso 1 (todos los factores son lineales no repetidos), la expresión racional propia puede ser escrita como una **suma de fracciones parciales** así:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2}$$

en que A, B y C son constantes por determinar.
A cada factor de la forma $(x - a)$ le corresponde una fracción parcial de la forma $\frac{N}{x - a}$

141

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Si podemos determinar las constantes A, B y C, habremos resuelto nuestro problema de descomponer la expresión racional dada en fracciones parciales.

142

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplicando ambos miembros por $(x+1)(x-1)(x-2)$ tenemos la ecuación sin denominadores.

$7x^2 - 9x - 1 =$ [ ]

$(x-1)(x-2)A + (x+1)(x-2)B + (x+1)(x-1)C$

143

$$7x^2 - 9x - 1 = (x-1)(x-2)A + (x+1)(x-2)B + (x+1)(x-1)C$$

Simplificando el segundo miembro, escribiéndolo en la forma $Px^2 + Qx + R$, tenemos:

$7x^2 - 9x - 1 =$ [ ]

$(x^2 - 3x + 2)A + (x^2 - x - 2)B + (x^2 - 1)C$

$Ax^2 - 3Ax + 2A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx^2 - C$

$(A + B + C)x^2 + (-3A - B)x + (2A - 2B - C)$

144

$7x^2 - 9x - 1 = (A + B + C)x^2 + (-3A - B)x + (2A - 2B - C)$

Observemos que,
siendo iguales los polinomios
del primero y segundo miembro,
deberá verificarse que:

$A + B + C = 7$

$-3A - B = -9$

$2A - 2B - C = -1$

145

Resulta un sistema de tres ecuaciones
con tres incógnitas:

$$A + B + C = 7 \quad (1)$$

$$-3A - B = -9 \quad (2)$$

$$2A - 2B - C = -1 \quad (3)$$

que, al ser resuelto,
nos da el valor numérico
de cada uno de los numeradores
de las fracciones parciales.

146

Resolvamos:

$$A + B + C = 7 \quad (1)$$

$$-3A - B = -9 \quad (2)$$

$$2A - 2B - C = -1 \quad (3)$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Por ejemplo,
por determinantes:

$$A + B + C = 7 \quad (1)$$
$$-3A - B = -9 \quad (2)$$
$$2A - 2B - C = -1 \quad (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1 + 6 + 0) - (-2 + 0 + 3) = 6$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (7 + 18 + 0) - (1 + 0 + 9) = 15$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & -9 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & -9 & 0 \end{vmatrix} = (9 + 3 + 0) - (-18 + 0 + 21) = 9$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -3 & -1 & -9 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ -3 & -1 & -9 \end{vmatrix} = (1 + 42 - 18) - (-14 + 18 + 3) = 18$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3$$

147

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

siendo $\begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = 3 \end{cases}$

tenemos:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\frac{5}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

o bien

$$\frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{x-2}$$

148

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{x-2}$$

Hemos logrado escribir
una expresión racional propia
como una suma de fracciones parciales

149

En esta forma,
una expresión racional impropia
puede ser transformada en un polinomio
y una suma de fracciones parciales

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$= x + 1 + \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{x-2}$$

150

De modo que
cuando nos encontremos
con un integrando
como este: $\longrightarrow \dfrac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

$\longrightarrow x + 1 + \dfrac{5}{2(x+1)} + \dfrac{3}{2(x-1)} + \dfrac{3}{x-2}$

sabremos cómo
transformarlo
en una suma de sencillas
expresiones,
fáciles de integrar.

8.5.2.3

Práctica adicional de descomposición de una expresión racional impropia en un polinomio y una expresión racional propia, y de descomposición de esta última en fracciones parciales, para casos en que el polinomio divisor de la expresión racional propia puede expresarse como un producto de factores lineales de la forma $(x - a)$ todos distintos, si se considera necesario.

151

Atención.

Caso 2

Cuando el denominador de una expresión racional propia es — o puede ser expresado como — un producto de factores lineales de la forma $(x - a)$ algunos de los cuales aparecen repetidos, * a cada factor de la forma $(x - a)^n$ le corresponderá la suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

en que $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ son constantes por determinar.

*Además de algún factor constante.

152

Sea la expresión racional propia

$$\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

cuyo denominador podemos expresar como un producto de factores, así:

[ ]

$(x + 2)(x + 1)(x + 1)$
o bien:
$(x + 2)(x + 1)^2$

153

$$\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

Queremos poner esta expresión racional propia en la forma de una suma de fracciones parciales.

Al factor lineal no repetido $(x + 2)$ le corresponderá una fracción parcial de la forma [ ]

$$\frac{A}{x + 2}$$

154

$$\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

Al doble factor $(x + 1)^2$ le corresponderá la suma de dos fracciones parciales, así:

[ ]

$$\frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

155

Podemos entonces, escribir:

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

156

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

Procederemos enseguida
a determinar las constantes A, B y C,
para lo cual empezamos por
multiplicar ambos miembros por $(x + 2)(x + 1)^2$
con lo que obtenemos:

$x^2 - 3 = (x + 1)^2 A + (x + 2)(x + 1) B + (x + 2) C$

157

$x^2 - 3 = (x + 1)^2 A + (x + 2)(x + 1) B + (x + 2) C$

Llevamos, ahora, el
segundo miembro a la forma
$Px^2 + Qx + R$:

$(x^2 + 2x + 1) A + (x^2 + 3x + 2) B + (x + 2) C$

$Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + 3Bx + 2B + Cx + 2C$

$(A + B) x^2 + (2A + 3B + C) x + (A + 2B + 2C)$

158

$x^2 - 3 = (A + B)x^2 + (2A + 3B + C)x + (A + 2B + 2C)$

Formulamos, a continuación,
el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas
que nos permitirá calcular A, B y C.

1
2
3

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 1 \\ 2A + 3B + C &= 0 \\ A + 2B + 2C &= -3 \end{aligned}$$

159

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 1 \\ 2A + 3B + C &= 0 \\ A + 2B + 2C &= -3 \end{aligned}$$

Respuesta
en los
cuadros siguientes.

160

Por ejemplo,
por
determinantes

$$A + B \quad = 1 \qquad (1)$$

$$2A + 3B + C = 0 \qquad (2)$$

$$A + 2B + 2C = -3 \qquad (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 1) - (0 + 2 + 4) = 1$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 0 - 3) - (0 + 2 + 0) = 1$$

161

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 1) - (0 - 3 + 4) = 0$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-9 + 4 + 0) - (3 + 0 - 6) = -2$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{0}{1} = 0$$

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2$$

162

Como $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{1}{x + 2} + \frac{0}{x + 1} + \frac{-2}{(x + 1)^2}$$

o bien:

$$\frac{1}{x + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2}$$

163

Hemos obtenido:

$$\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{1}{x + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2}$$

resultado que verificamos
efectuando la suma de las fracciones parciales:

$$\frac{(x + 1)^2 - 2(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - 2x - 4}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

8.5.2.4

Práctica adicional de descomposición de una expresión racional propia en fracciones parciales, para casos en que el polinomio divisor puede expresarse como un producto de factores lineales de la forma $(x - a)$ algunos de los cuales aparecen más de una vez, si se considera necesario.

164

Atención .

Caso 3

Cuando algunos de los factores en que se puede descomponer el denominador de una expresión racional propia son cuadráticos (irreducibles) y ninguno de ellos aparece más de una vez, a cada factor cuadrático le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax + B}{Px^2 + Qx + R}$$

en que A y B son constantes por determinar.

165

Sea la expresión racional propia

$$\frac{4x - 2}{x^3 - x^2 + 2x}$$

que se quiere transformar en una suma de fracciones parciales.

166

$$\frac{4x - 2}{x^3 - x^2 + 2x}$$

Empezaremos por factorizar el polinomio del denominador.

Por simple inspección encontramos que uno de los factores es [ ]

por lo que podemos escribir:

$x^3 - x^2 + 2x =$ [ ] $\cdot$ [ ]

x

$x(x^2 - x + 2)$

167

$$\frac{4x - 2}{x^3 - x^2 + 2x} = \frac{4x - 2}{x(x^2 - x + 2)}$$

Intentemos, ahora, la factorización del trinomio cuadrático $x^2 - x + 2$:

Por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$$

el trinomio $x^2 - x + 2$ es irreducible.

168

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2+2x} = \frac{4x-2}{x(x^2-x+2)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \text{[ ]}$$

Escribir como una suma de fracciones parciales con numeradores indeterminados.

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

169

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

Quitando denominadores y expresando el segundo miembro en la forma $Px^2 + Qx + R$

$$4x-2 = A(x^2-x+2) + Bx^2 + Cx$$

$$4x-2 = \underbrace{Ax^2} - \widehat{Ax} + \widehat{2A} + \underbrace{Bx^2} + \widehat{Cx}$$

$$4x-2 = (A+B)x^2 + (C-A)x + 2A$$

170

$$4x-2 = (A+B)x^2 + (C-A)x + 2A$$

Ecuaciones para el cálculo de las constantes A, B y C:

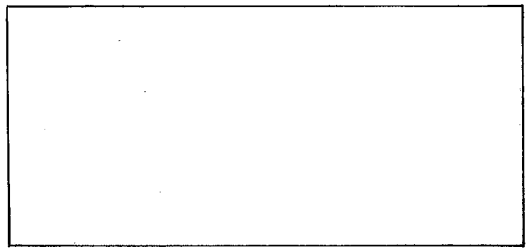
[ ] ①
[ ] ②
[ ] ③

$$A + B = 0$$
$$C - A = 4$$
$$2A = -2$$

171

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 & (1) \\ C - A = 4 & (2) \\ 2A = -2 & (3) \end{cases}$$



De **3**: $A = -1$

De **1**: $-1 + B = 0$

$\therefore B = 1$

De **2**: $C + 1 = 4$

$\therefore C = 3$

172

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2}$$

Como $A = -1$, $B = 1$ y $C = 3$

escribimos:

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{-1}{x} + \frac{x+3}{x^2-x+2}$$

o

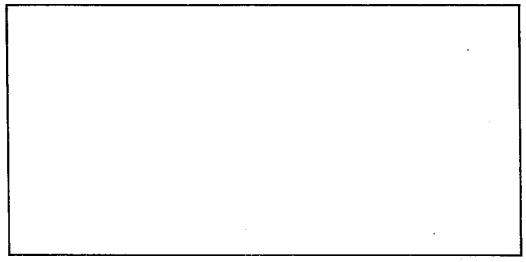
$$\frac{x+3}{x^2-x+2} - \frac{1}{x}$$

173

Hemos obtenido:

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \frac{x+3}{x^2-x+2} - \frac{1}{x}$$

Verificando:



$$\frac{x(x+3) - (x^2-x+2)}{x(x^2-x+2)}$$

$$\frac{x^2+3x-x^2+x-2}{x(x^2-x+2)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)}$$

8.5.2.5

Práctica adicional de descomposición de una expresión racional propia en fracciones parciales, para casos en que el polinomio divisor puede expresarse como un producto de factores, algunos de los cuales son trinomios cuadráticos irreducibles no repetidos, si se considera necesario.

174

Atención .

Caso 4

Cuando algunos de los factores en que se puede descomponer el denominador de una expresión racional propia son trinomios cuadráticos irreducibles repetidos, a cada factor cuadrático de la forma:

$$(Px^2 + Qx + R)^n$$

le corresponde una suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{A_1\,x + B_1}{Px^2 + Qx + R} + \frac{A_2\,x + B_2}{(Px^2 + Qx + R)^2} + \frac{A_3\,x + B_3}{(Px^2 + Qx + R)^3} + \ldots + \frac{A_n\,x + B_n}{(Px^2 + Qx + R)^n}$$

175

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

es la expresión racional propia que ahora queremos **descomponer en fracciones parciales.**

176

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \square$$

suma de fracciones parciales

$$\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

177

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Quitando denominadores y poniendo en la forma de un polinomio en x el segundo miembro, tenemos:

$$x^3 + x - 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$

$$x^3 + x - 1 = \underbrace{Ax^3} + \underbrace{Bx^2} + \underbrace{Ax} + B + \underbrace{Cx} + D$$

$$x^3 + x - 1 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

178

$$x^3 + x - 1 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

Ecuaciones para cálculo de las constantes:

$$\square \quad (1)$$

$$\square \quad (2)$$

$$\square \quad (3)$$

$$\square \quad (4)$$

$A = 1$

$B = 0$

$A + C = 1$

$B + D = -1$

179

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} A = 1 & (1) \\ B = 0 & (2) \\ A + C = 1 & (3) \\ B + D = -1 & (4) \end{cases}$$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$A = 1$ (1)

$B = 0$ (2)

$A + C = 1$ (3)

$B + D = -1$ (4)

De **3:** $1 + C = 1 \quad \therefore \mathbf{C = 0}$

De **4:** $0 + D = -1 \quad \therefore \mathbf{D = -1}$

Por lo tanto, tenemos:

$A = 1, B = 0, C = 0, D = -1$

180

Siendo: $A = 1, B = 0, C = 0$ y $D = -1$

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

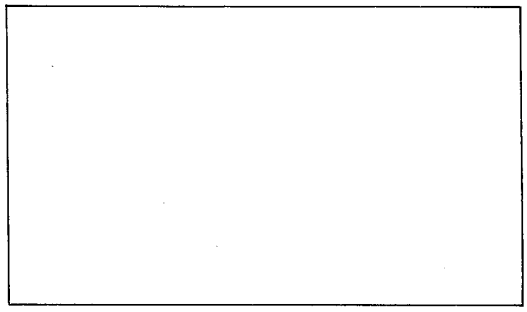
$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{-1}{(x^2 + 1)^2}$$

181

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

Verificando:



$$\frac{x(x^2 + 1) - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

8.5.2.6

Práctica adicional de descomposición de una expresión racional propia en fracciones parciales, para casos en que el polinomio divisor puede expresarse como un producto de factores algunos de los cuales son trinomios cuadráticos irreducibles repetidos, si se considera necesario.

182

A manera de resumen diremos que:

es posible expresar una fracción racional impropia como la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

Una expresión racional propia puede ser puesta en la forma de una suma de fracciones parciales. Se presentan 4 casos de acuerdo con el carácter de los factores en que puede descomponerse el polinomio denominador.

183

Caso 1. Factores lineales distintos.

A cada factor lineal de la forma $(x - a)$ le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{A}{x - a}$$

184

Caso 2. Factores lineales repetidos.

A cada factor lineal de la forma $(x - a)^n$ le corresponde una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

185

Caso 3. Factores cuadráticos distintos.

A cada factor cuadrático irreducible de la forma $px^2 + qx + r$ le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{px^2 + qx + r}$$

Caso 4. Factores cuadráticos repetidos.

A cada factor cuadrático irreducible de la forma $(px^2 + qx + r)^n$ le corresponde una suma de fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{px^2 + qx + r} + \frac{A_2x + B_2}{(px^2 + qx + r)^2} + \frac{A_3x + B_3}{(px^2 + qx + r)^3} + \ldots + \frac{A_nx + B_n}{(px^2 + qx + r)^n}$$

En todos los casos: A, B, C, etc., son constantes por determinar.

8.5.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *descomponer* una expresión racional impropia dada en un polinomio y una expresión racional propia;
- *descomponer* una expresión racional propia en fracciones parciales, siempre que el denominador se encuentre expresado como un producto de factores, o pueda ser factorizado por los procedimientos estudiados.

5.3

Integración por fracciones parciales

187

Cuando nos encontremos con una integral en que el integrando es una expresión racional impropia, procederemos a transformar ésta en la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

188

Por ejemplo, se requiere calcular:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Hemos encontrado que:

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = x + 1 + \frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

por lo tanto:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \underline{\qquad\qquad}$$

Escribir como una suma de integrales

$$\int x\,dx + \int dx + \int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

189

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \int x\,dx + \int dx + \int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Las primeras dos integrales del segundo miembro son fáciles de calcular; tenemos:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \boxed{\qquad\qquad} + \int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\frac{x^2}{2} + x$$

190

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Para resolver una integral, en que el integrando es una expresión racional propia, como la que aparece en el segundo miembro, es necesario descomponer la expresión racional propia en fracciones parciales.

191

Hemos hallado que:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{5}{2(x + 1)} + \frac{3}{2(x - 1)} + \frac{3}{x - 2}$$

por lo que:

$$\int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x + 1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x - 1} + 3\int \frac{dx}{x - 2}$$

192

$$\int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x-2}$$

Ahora, sabemos que:

$$\frac{5}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$3\int \frac{dx}{x-2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$\frac{5}{2}\ln|x+1|$

$\frac{3}{2}\ln|x-1|$

$3\ln|x-2|$

193

La solución completa:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - 8x + 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

194

Necesitamos calcular

$$\int \frac{(x^2 - 3)\,dx}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$$

La descomposición de la expresión racional propia que aparece en el integrando la hemos ya realizado:

$$\frac{x^2 - 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

por lo que escribimos:

$$\int \frac{(x^2 - 3)\,dx}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

195

$$\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2} = \int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x+2} = \boxed{}$$

$$2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \boxed{\phantom{-\frac{2}{x+1}}}$$

$$\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2} = \boxed{\phantom{\ln|x+2| + \frac{2}{x+1} + C}}$$

$\ln|x+2|$

$-\dfrac{2}{x+1}$

$\ln|x+2| + \dfrac{2}{x+1} + C$

196

$$\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^2+4x^2+5x+2} = \ln|x+2| + \frac{2}{x+1} + C$$

197

Se requiere calcular $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)}$

Hemos encontrado que:

$$\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)} = \frac{x+3}{x^2-x+2} - \frac{1}{x}$$

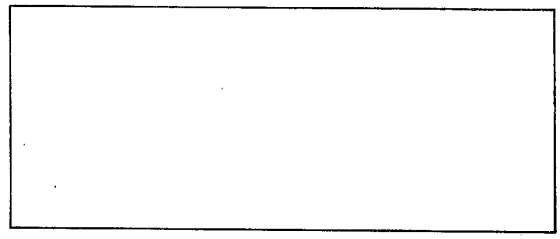
por lo tanto:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-x+2} - \int \frac{dx}{x}$$

198

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-x+2} - \int \frac{dx}{x}$$

Resolvamos la primera integral del segundo miembro, completando un trinomio cuadrado perfecto en el denominador y transformando adecuadamente el numerador:



$$\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-x+2} = \int \frac{[(x-1)+4]dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \int \frac{(x-1)\,dx}{(x-1)^2+1}$$

$$+ 4\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+2|$$

$$+ 4\,\text{Arctan}(x-1)$$

199

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-x+2} - \int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+2| + 4\,\text{Arctan}\,(x-1) - \int \frac{dx}{x}$$

Completando la solución:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \text{L_____}$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-x+2| + 4\,\text{Arctan}\,(x-1) - \ln|x| + C$$

200

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-x+2} - \int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+2| + 4\,\text{Arctan}(x-1) - \ln|x| + C$$

201

Calcular $\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)^2}$

sabiendo que

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

202

$$\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$\frac{1}{2} \ln (x^2 + 1)$

o

$\ln \sqrt{x^2 + 1}$

203

$$\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{(x^2 + 1)^2} = \ln \sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \boxed{\qquad\qquad}$$

↓

Por la fórmula de reducción 5.4:

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int (x^2 + 1)^{-2}\,dx$$

Fórmula de reducción:

$$\int u^m (a + bu^q)^p\,du = -\frac{u^{m+1}(a + bu^q)^{p+1}}{q(p+1)a} + \frac{pq + q + m + 1}{q(p+1)a}\int u^m (a + bu^q)^{p+1}\,du$$

$$\int (x^2 + 1)^{-2}\,dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{Arctan}\,x$$

204

$$\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln\sqrt{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{Arctan}\,x$$

$$\int \frac{(x^3 + x - 1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\text{Arctan}\,x + C$$

8.5.3.1

Práctica adicional de
cálculo de integrales
por descomposición del integrando
en fracciones parciales,
si se considera necesario.

8.5.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* integrales descomponiendo el integrando en fracciones parciales.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100